Einführung

Sei $\mathfrak{g} = sl_{n+1}(\mathbb{C})$ und $W = S_n$.

Für $w \in S_{n+1}$ sei $\ell(w)$ = min Anzahl von Transpositionen $(i, i+1)$ in einer Produktzerlegung von w

Die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(W)$ wird über $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ erzeugt von Symbolen T_w, $w \in W$, und Relationen

$$T_y T_w = T_{yw} \quad \text{falls } \ell(yw) = \ell(y) + \ell(w)$$

$$(T_s + 1)(T_s - q) = 0 \quad \text{falls } s \text{ eine Transposition } (i, i+1)$$

Die KL-Polynome $P_{yw}(q)$ sind eindeutig best durch

$$P_{yw}(q) = 0 \qquad y \not\leq w$$

$y \leq w \;:\Leftrightarrow\; \exists\, s_j, s_k$
$y = s_{i_1} \cdots s_{i_m}$
für $w = s_1 \cdots s_N$
$s_i = (u_i\ u_i+1)$, $N = \ell(w)$

$$C'_w = q^{-\ell(w)/2} \sum_{y \leq w} P_{yw}(q)\, T_y$$

sind invariant unter $D : T_w \mapsto T_{w^{-1}}^{-1}$.

KL – Vermutung (1980)

$$\mathrm{ch}\, L_w = \sum_{y \le w} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)\, \mathrm{ch}\, M_y$$

einf. Modul von $\mathfrak{g}$ von höchstem Gewicht $-w(\rho)-\rho$

Verma-Modul zum h. G. $-y(\rho)-\rho$

Beweis durch Beilinson-Bernstein (1993)

Darstellungen von halb-einfachen Liealgebren in der Kategorie $\mathcal{O}$

Im folgenden sei $\mathfrak{g}$ ein halb-einfache Liealgebra über $\mathbb{C}$ und $\mathfrak{h}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\dim \mathfrak{h} = l$.

Wir werden strukturtheoretische Resultate nach Bedarf ohne Beweis angeben (Kapitel 0).

Kapitel 0.1 Cartan-Zerlegung

Für $\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus 0$ sei

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{ x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h) x \quad \forall h \in \mathfrak{h} \}.$$

Ist $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$, so heißt α eine Wurzel.

Wurzeln: $\Phi := \Phi(\mathfrak{g} : \mathfrak{h}) = \{ \alpha \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0 \}$.

Ist $h_0 \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h_0) \in \mathbb{R} \setminus 0 \quad \forall \alpha \in \Phi$, so heißt $\Phi^+ := \{ \alpha \in \Phi \mid \alpha(h_0) > 0 \}$ positives System.

$\Delta := \Phi^+ \setminus (\Phi^+ + \Phi^+)$ heißt <u>einfaches System</u>. Es gilt $|\Delta| = l$.

Die <u>Cartan-Zerlegung</u> ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$

mit $\mathfrak{n}^\pm := \bigoplus_{\pm\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$.

$\mathfrak{b} := \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h}$ heißt <u>Borel-Unteralgebra</u>

Es gilt $\dim \mathfrak{n}^+ = m = |\Phi^+|$, also $\dim \mathfrak{g} = l + 2m$

<u>Beispiel</u> $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C}) = \{ X \in \mathbb{C}^{(l+1)\times(l+1)} \mid \operatorname{tr} X = 0 \}$

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{l+1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{l+1} \lambda_i = 0 \right\}$$

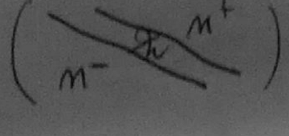
$$\Phi = \{ \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j \}$$

$$\varepsilon_i \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{l+1} \end{pmatrix} := \lambda_i .$$

Standard-pos. System:

$$\Phi^+ = \{ \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i < j \}$$

$$\Delta = \{ \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid i < l+1 \}$$



Sei $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$.

Man wählt $x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$,

so dass $\alpha_i(h_i) = 2$ mit $h_i := [x_i, y_i]$.

Dann gilt $[x_i, y_j] = \delta_{ij} h_i \ \forall \ i, j$

$$[h_i, x_i] = 2x_i, \quad [h_i, y_i] = -2y_i$$

$$[h_j, x_i] = \alpha_i(h_j) x_i$$

$$[h_j, y_i] = -\alpha_i(h_j) y_i.$$

Insbesondere $\langle h_i, x_i, y_i \rangle \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Wir wählen weitere $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Delta$.

0.2 Universelle Einhüllende Algebra.

Für jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ existiert eine assoziative Algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ und eine Liealgebra-Injektion $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, s.d.

$\forall$ assoz. Alg A und alle Liealgebra-Morphismen

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & A \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[ur, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\exists!$ Algebra-Morphismus $\tilde{\phi}$ s.d. das Diagramm kommutiert.

Poincaré – Birkhoff – Witt:

Ist $x_1, \dots, x_n$ eine Basis von $\mathfrak{k}$, so ist

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \quad , a_j \in \mathbb{N} ,$$

eine Basis (PBW – Basis genannt) von $\mathcal{U}(\mathfrak{k})$.

Insbesondere ist

$$y^r h^s x^t := y_1^{r_1} \cdots y_m^{r_m} h_1^{s_1} \cdots h_\ell^{s_\ell} x_1^{t_1} \cdots x_m^{t_m}$$

eine Basis von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Es folgt

(1) Als ad $\mathfrak{h}$ - Moduln:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+) .$$

(2) Sei für $\nu \in \mathfrak{h}^*$

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})_\nu := \{ u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \mid hu - uh = \nu(h) u \ \forall h \in \mathfrak{h} \} .$$

Dann gilt

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\nu \in \Lambda_r} \mathcal{U}(\mathfrak{g})_\nu$$

mit $\Lambda_r = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathfrak{h}^*$ Wurzelgitter.

und

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})_\nu = \left\langle y^r h^s x^t \;\middle|\; \nu = \sum_{i=1}^{m} (t_i - r_i)\alpha_i \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

—

~~Kapitel 1 Höchstgewichtsmoduln~~

Kapitel 1 Kategorie $\mathcal{O}$: Grundlagen

Def. 1.1 $\mathcal{O}$ ist die volle Unterkategorie der Kategorie ${}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}\mathrm{Mod}$ aller Links-$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Moduln, deren Objekte M folgenden Bedingungen genügen:

($\mathcal{O}1$) M ist endlich erzeugt über $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$;

($\mathcal{O}2$) $\mathrm{Res}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{h}} M$ ist halb-einfach, d.h.

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda, \quad M_\lambda := \{ v \in M \mid hv = \lambda(h)v \;\; \forall h \in \mathfrak{h} \};$$

($\mathcal{O}3$) $\mathrm{Res}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{n}^+} M$ ist lokal endlich, d.h. $\forall v \in M$:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(\mathfrak{n})v < \infty.$$

Nach Definition 1.1 gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N).$$

<u>Lemma 1.2</u> (1) $\mathcal{O}$ enthält alle endlich-dimensionalen Moduln.

(2) $\forall M \in \mathcal{O}$; $\lambda \in \mathfrak{h}^*$: $\dim M_\lambda < \infty$

(3) $\forall M \in \mathcal{O}\ \exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathfrak{h}^*$:

$$\Pi(M) := \{\lambda \mid M_\lambda \neq 0\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \lambda_j - \langle \Phi^+ \rangle_N .$$

<u>Beweis</u>: (1) Sei M endl.-dim. Dann ist M endl. erzeugt. Also gilt (O1). (O3) ist trivial.

~~$M = \bigoplus_{j=1}^{n} M_{\lambda_j}$, M_{λ_j} einfach~~.

Ferner $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$, da $\mathfrak{g}$ halb-einfach ist. (Weyl)

Folglich gilt (O2).

(2,3) M besitzt ein Erzeugendensystem aus Gewichtsvektoren $v_1, \dots, v_n$. Also hat man eine $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-lineare Surjektion

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+) v_i \longrightarrow M .$$

Daraus folgt (3). Mit $V_i := \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+) v_i$ ist $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$:

$$\dim M_\lambda \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{\substack{\nu \in \langle -\Phi^+ \rangle_{\mathbb{N}} \\ \lambda - \nu \in \Pi(V_i)}} \dim M_\nu \, \dim (V_i)_{\lambda-\nu}}_{\leq \dim V_i \, \dim \bigoplus_{\nu \in \lambda - \Pi(V_i)} M_\nu} < \infty \quad \square.$$

↓ 18.10.2013

Theorem 1.3

(1) $\mathcal{O}$ ist eine Noethersche Kategorie, d.h. für jedes $M \in \mathcal{O}$ gilt die aufsteigende Kettenbedingung für Untermoduln.

(2) $\mathcal{O}$ ist unter Quotienten, Untermoduln und endl. direkten Summen abgeschlossen, also abelsch.

(3) Sei L endl.-dim. $\mathfrak{g}$-Modul. $M \longmapsto M \otimes L$ definiert einen exakten Funktor $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$.